

Eine Fuzzy-Basis für qualitative Bewegungsrepräsentation

Alexandra Musto

Qualitative räumliche Repräsentationen wie „links“ oder „nahe bei“ sind der menschlichen Denkweise meist angemessener als quantitative Repräsentationen wie 53° oder 1253mm . Deswegen ist es sinnvoll, in der Mensch-Maschine-Schnittstelle von Systemen, die mit Bewegung im Raum zu tun haben, qualitative Repräsentationen von Bewegungsverläufen einzusetzen. Die vorgestellte QMV-Repräsentation beruht auf einer Diskretisierung des Raumes in Richtungs- und Distanzbereiche. Die Aufteilung des Raumes in diskrete Bereiche hat aber den Nachteil, daß Bewegungsverläufe, die in der numerischen Repräsentation sehr ähnlich waren, in der qualitativen Repräsentation sehr unähnlich werden können, wenn sie sich nämlich immer um die Intervallgrenzen bewegen. Diesem Problem kann abgeholfen werden, wenn vor die qualitative Repräsentation eine Fuzzy-Repräsentation von Bewegungsverläufen geschaltet wird. Hier werden Bewegungen mittels aus Fuzzy-Zahlen aufgebauten Fuzzy-Vektoren repräsentiert. Diese Fuzzy-Vektoren können anschließend auf die durch die qualitativen Intervalle erzeugte Parkettierung des Raums abgebildet werden, wodurch die beiden Repräsentationen kombiniert werden. In dieser Repräsentation sind Bewegungssequenzen gut vergleichbar und können für die Benutzerinteraktion leicht in QMV-Sequenzen abgebildet werden.

1 Qualitativ versus Quantitativ

Bewegungsverläufe und Repräsentationen davon begegnen uns überall in unserem täglichen Leben, ob es sich dabei um eine Wegbeschreibung handelt oder darum, die Bewegung der in der Fußgängerzone entgegenkommenden Passanten wahrzunehmen und vorauszuberechnen, um ausweichen zu können.

Auch in der Physik und in den Ingenieurwissenschaften spielt Bewegung und deren Repräsentation eine große Rolle: Exakte Repräsentationen und Berechnungen sind dazu

nötig, die Flugbahn einer Apollo-Kapsel zu berechnen, die Umlaufbahn der Jupitermonde, oder die Trajektorie eines Roboterarms.

Bei den letztgenannten Beispielen handelt es sich um quantitative, numerische Repräsentationen. Im Titel dieser Arbeit ist aber von *qualitativen* Repräsentationen die Rede. Was bedeutet qualitativ im Unterschied zu quantitativ? Bei beiden Arten der Repräsentation geht es darum, bestimmte *Größen* zu benennen: Wie lang ist eine Strecke, wie schwer ein Gewicht, wie groß ein Land? Beiden gemeinsam ist es auch, daß man Größen benennt, indem man sie zu anderen Größen in Relation setzt. Bei einer quantitativen Repräsentation ist die Vergleichsgröße eine vordefinierte Einheit, z.B. ein Meter, der als Urmeter auch durchaus real und physikalisch vorliegen muß. Bei quantitativen Repräsentationen liegen Daten einer bestimmten Dimension (Länge, Fläche, ...) immer im Vergleich zu derselben Größe vor, also z.B. zum Meter¹. Bei qualitativen Repräsentationen muß dies nicht so sein. So kann z.B. die Länge von Haaren im Vergleich zu einem Streichholz angegeben werden, die Länge einer Wegstrecke in einer Stadt hingegen in Gebäudeblöcken, ohne daß dies zu Verwirrungen beim Hörer führen würde.

Ganz wesentlich bei qualitativen Repräsentationen ist, daß sie, im Gegensatz zu quantitativen Repräsentationen, einen Vergleich immer nur „so ungefähr“ machen. Wenn jemand erzählt, die beste Freundin habe sich die Haare streichholzkurz schneiden lassen, so erwartet niemand, daß die Haare exakt genauso lang sind wie ein (evtl. genormtes) Streichholz, sondern eben nur ungefähr so lang. Die qualitative Längenangabe bezeichnet ein Intervall, das sich bei „streichholzkurz“ etwa von 2 bis 5 cm erstreckt.

In [8] wird dargelegt, daß die räumlichen mentalen Modelle [3], die der Mensch zur Verfügung hat, nur über ganz grobe Relationen zwischen den einzelnen Elementen verfügen und meist keinerlei metrische Information enthalten. Typische von Menschen verwendete räumliche Ausdrücke sind z. B. „nahe bei“, „links von“, „östlich von“. Nicht nur, daß in räumlichen mentalen Modellen kaum metrische Information vorkommt, es gibt auch häufig systematische Verzerrungen, die die Einschätzung von Distanzen und Richtungen beeinflussen. So wird z. B. in [7] festgestellt, daß die Distanz von einem normalen Gebäude zu einer Landmarke² kleiner eingeschätzt wird als die Entfernung von der selben Landmarke zum selben Gebäude. Das führt zu asymmetrischen Distanzen.

Da in der menschlichen Kognition kaum metrische Informationen repräsentiert werden, und wenn, dann häufig sehr schlecht, ungenau oder mit systematischen Verzerrungen

¹ ... oder können, falls in Bezug zu unterschiedlichen Vergleichsmaßen vorliegend, mittels Formeln in die jeweils andere Einheit umgerechnet werden.

²Landmarke wird in [7] definiert als räumlicher Referenzpunkt, der benutzt wird, um andere, Nichtreferenzpunkte, zu lokalisieren. Im Experiment wurde die Auffälligkeit und Wichtigkeit von Örtlichkeiten einer den Versuchspersonen bekannten Umgebung indirekt über Kenntnis der jeweiligen Örtlichkeit, Anzahl der Besuche des Orts und Einschätzung der historischen und kulturellen Bedeutung gemessen. Es wurde dann angenommen, daß bei Paarungen von Orten mit hoher und niedriger Auffälligkeit der mit der hohen Auffälligkeit als Referenzpunkt benutzt wird. Die Kontrollgruppe erhielt Paare von Orten gleicher Auffälligkeit.

behaftet, ist es sinnvoll, in der Mensch-Maschine-Interaktion nicht zuviel Gewicht auf quantitative Repräsentationen zu legen, und stattdessen mehr qualitative Repräsentationen wie z. B. das oben genannte „streichholzkurz“ zu verwenden.

Überall, wo sich z.B. Roboter autonom durch eine offene³ Umgebung bewegen sollen, ist sowohl die Eigenbewegung des Roboters als auch die Bewegung anderer Subjekte wahrzunehmen, zu repräsentieren und zu verarbeiten – sei es für Bahnplanung, für Kollisionsvermeidung oder an der Schnittstelle für Instruktionen des Menschen. Andere Anwendungen, bei denen die Repräsentation von Bewegungsverläufen wichtig bis essentiell ist, sind z.B. die Verkehrsüberwachung, Verkehrstelematik oder automatische Indizierung von Bildfolgen in Multimediadatenbanken. An der Benutzungsschnittstelle sind, wie bereits dargelegt, *qualitative* Repräsentationen von besonderer Wichtigkeit.

2 Qualitative Bewegungsvektoren

Qualitative Bewegungsvektoren (Qualitative Motion Vectors, QMVs) und Algorithmen, sie zu verarbeiten, wurden in [5, 6, 4] vorgestellt. Die qualitative Darstellung eines kontinuierlichen Bewegungsverlaufs im Zweidimensionalen als QMV-Sequenz basiert auf der Diskretisierung der Domänen Richtung, Entfernung und Zeit. Zunächst wird der Bewegungsverlauf diskret abgetastet. Diese Vorgehensweise hat den Vorteil, daß Zeit implizit repräsentiert werden kann und Distanz äquivalent zu Geschwindigkeit wird: Je größer die Distanz, die ein Objekt in einem Abtastzyklus zurückgelegt hat, desto höher die Geschwindigkeit, mit der es sich bewegt hat. Der örtliche Verlauf der Bewegung (die Spur) wird somit durch einen Polygonzug beschrieben. Fügt man an den Abtastpunkten Markierungen ein, so beschreiben diese zeitlich äquidistante Punkte. Eine wahrgenommene Richtungsänderung fällt immer mit einer dieser Markierungen zusammen, aber nicht an jeder Markierung muß eine Richtungsänderung stattfinden. Die örtliche Distanz zwischen den Markierungen codiert dabei die Geschwindigkeit, mit der sich das Objekt in der Zwischenzeit bewegt hat. Große Distanzen entsprechen hohen Geschwindigkeiten, kleine niedrigen. Die qualitative Richtung des Bewegungsverlaufs zwischen zwei Markierungen des Polygonzugs p_i und p_{i+1} ist nun einfach die qualitative Orientierung von Punkt p_{i+1} relativ zu Punkt p_i . Qualitative Orientierungen erhält man durch Diskretisierung der Orientierungsdomäne wie in Abbildung 1 dargestellt. Eine numerische Orientierung (Winkel) wird einfach identifiziert mit dem Namen des Intervalls, in das sie fällt.

Die Weite einer Bewegung zwischen zwei Markierungen des Polygonzugs p_i und p_{i+1} kann ebenso einfach codiert werden durch die aus dem qualitativen räumlichen Schließen bekannten Distanzrelationen, siehe z.B. [2] und Abbildung 2.

Da die Bewegungsgeschwindigkeit von der Weite der Bewegung in einem Abtastzyklus abgeleitet wird, ist es sinnvoll, auch nur soviele Geschwindigkeiten zu unterscheiden, wie

³im Gegensatz zu abgeschlossen wie z. B. eine Fertigungsstraße

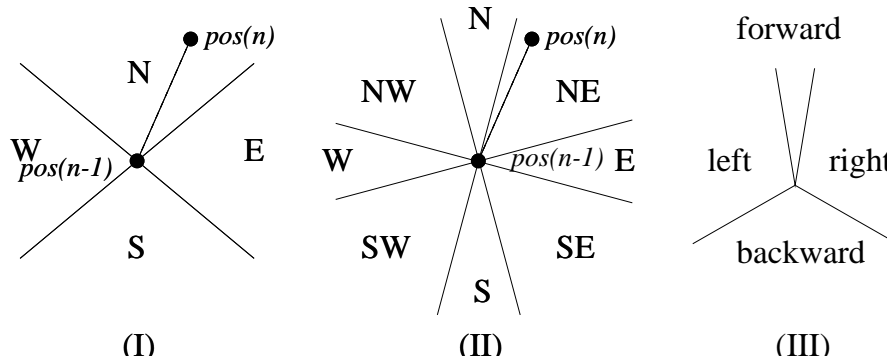


Abbildung 1: Qualitative Repräsentation von Bewegungsrichtung

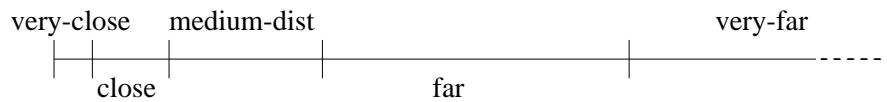


Abbildung 2: Qualitative Repräsentation von Bewegungsweite

man Entfernungen unterscheiden kann, da feiner sowieso nicht differenziert werden kann. Die explizite qualitative Repräsentation von Geschwindigkeit in einem Segment des Polygonzugs kann deswegen durch einfache Abbildung der entsprechenden Distanzrelation auf eine qualitative Bezeichnung für Geschwindigkeit geschehen; also z.B. sinnvollerweise durch Abbildung von „sehr nah“ auf „sehr langsam“, „nah“ auf „langsam“, ... „sehr weit“ auf „sehr schnell“.

Bei allen drei Domänen Distanz, Richtung und Geschwindigkeit muß die 0 als besonderer Wert hinzugefügt werden, um Stillstand zu modellieren.

Ein qualitativer Bewegungsvektor (QMV) v_i nun ist ein Vektor, der die Positionsveränderung eines Objekts zwischen zwei Markierungen p_i und p_{i+1} des die Trajektorie repräsentierenden Polygonzugs beschreibt, und zwar mittels qualitativer Komponenten für Richtung und Entfernung. Da die zeitliche Entfernung δ der Markierung des Polygonzugs bekannt ist, ist die Geschwindigkeit hierin implizit codiert:

$$\langle \text{Dist}_1 \text{ Dir}_1 \rangle^{i_1} \langle \text{Dist}_2 \text{ Dir}_2 \rangle^{i_2} \dots \langle \text{Dist}_n \text{ Dir}_n \rangle^{i_n},$$

wobei die Dist_i für qualitative Distanzrelationen stehen, die Dir_i für qualitative Richtungsrelationen, und die $i_i \in \mathbb{N}$ Zähler sind, die angeben, für wieviele Zeiteinheiten δ sich Geschwindigkeit (also Distanz) und Richtung der Bewegung nicht geändert haben. Die Zähler sind lediglich eine abkürzende Schreibweise, um kürzere Vektorsequenzen zu erzielen.

Das Beispiel zeigt eine QMV-Sequenz, die mit der Mauseingabe des Testtools MM⁴ (dargestellt in Abbildung 3) generiert wurde:

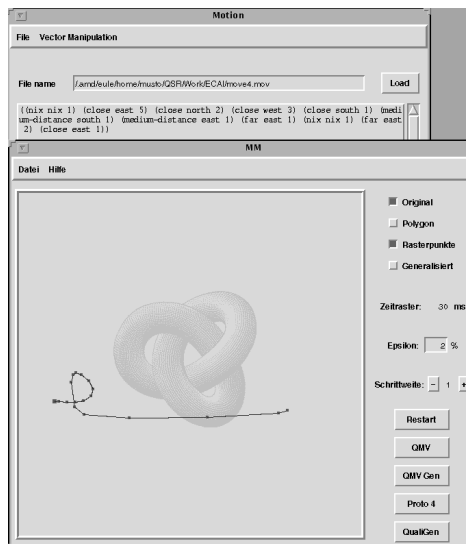


Abbildung 3: Beispielsequenz

```
<0 0>1 <close east>5 <close north>2 <close west>3 <close south>1
<medium-dist south>1 <medium-dist east>1 <far east>1 <0 0>1
<far east>2 <close east>1
```

Diese Spur beschreibt also eine Bewegung, bei der das Objekt zunächst für eine Zeiteinheit stillsteht, sich dann für 5 Zeiteinheiten jeweils eine kurze Distanz Richtung „Osten“ bewegt, dann für zwei Zeiteinheiten jeweils eine kurze Distanz Richtung „Norden“, dann für drei Zeiteinheiten jeweils eine kurze Distanz Richtung Westen, usw.

Repräsentiert man die Geschwindigkeiten explizit, erhält man folgende Sequenz:

```
<0 0 0>1 <close east slow>5 <close north slow>2 <close west slow>3
<close south slow>1 <medium-dist south medium-vel>1
<medium-dist east medium-vel>1 <far east fast>1 <0 0 0>1
<far east fast>2 <close east slow>1
```

⁴Es handelt sich hier um eine ältere Implementierung des MM-TOOLS in Scheme/Tk

Wenn man mehrere gleiche Vektoren zusammenfassen will (wie z.B. hier `<close east slow>`⁵, was ja für 5 Vektoren steht, muß man natürlich die Distanzen addieren (5 mal `close` kann ja durchaus eine größere Distanz ergeben, z.B. `medium-dist`), während die ursprünglichen Geschwindigkeiten selbstverständlich gleich bleiben, also z.B. `<0 0 0>`¹ `<medium-dist forward slow>` `<close left slow>` `<close left slow>` `<close left slow>` `<medium-dist forward medium-vel>` `<medium-dist left medium-vel>` `<far forward fast>` `<0 0 0>`¹ `<far forward fast>` `<close forward slow>`

Die Richtungsrelationen, die hier absolut (im Folgenden auch *allozentrisch* genannt) in `north`, `east`, `south` und `west` benannt sind, können auch relativ (im Folgenden auch *egozentrisch* genannt) ausgedrückt werden; und zwar immer relativ zur Richtung der vorangegangenen Bewegung wie bei „rechts abbiegen“, siehe auch Abbildung 1 (III). Start-Richtung ist dabei immer `forward`. Unsere Beispielsequenz sieht dann folgendermaßen aus:

```
<0 0 0>1 <medium-dist forward slow> <close left slow> <close left slow>
<close left slow> <medium-dist forward medium-vel> <medium-
dist left medium-vel> <far forward fast> <0 0 0>1 <far forward fast>
<close forward slow>.
```

3 Fuzzy-Modellierung von Bewegungsverläufen

Ein großes Problem bei diskreten Intervallen ist, daß Bewegungsverläufe, die sich nur minimal unterscheiden, sehr unterschiedlich repräsentiert werden, wenn die numerischen Werte immer in der Nähe der Intervallgrenzen liegen, aber einmal auf der einen und das andere mal auf der anderen Seite der Grenze. Ein Beispiel für die Richtungsdomäne ist in Abbildung 4 gegeben. Dieses Verhalten läuft natürlich konträr zu dem Anspruch, daß Ähnliches auch ähnlich repräsentiert werden sollte.

Um dies zu beheben, kann man entweder die Intervalle (Quantity Spaces) oder die Bewegungsvektoren als Fuzzy-Mengen modellieren. Während klassische Mengen durch charakteristische Funktionen ausgezeichnet sind, die nur zwei Werte annehmen können (1 oder 0, d. h. ein Element gehört zu einer Menge oder nicht), wird bei einer Fuzzy-Menge diese Zweiwertigkeit aufgegeben (siehe [1], S. 5):

Definition 3.1

Sei G eine (stets klassische) Grundmenge, μ_A eine (stets klassische) Funktion der Grundmenge G in das Einheitsintervall $[0, 1]$ der reellen Achse:

$$\mu_A : G \rightarrow [0, 1].$$

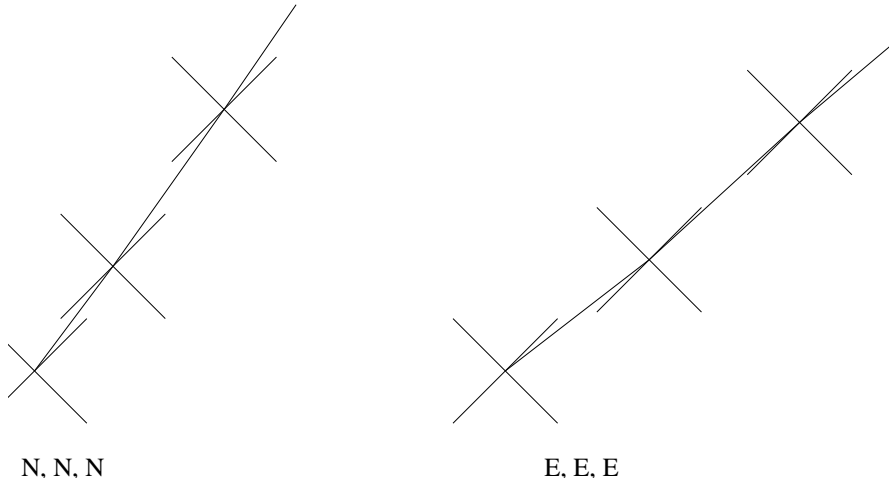


Abbildung 4: Ähnliche Bewegungsverläufe werden unähnlich repräsentiert

Dann heißt die Menge A aller Paare $(x, \mu_A(x))$

$$A = \{(x, \mu_A(x)) | x \in G\}$$

eine Fuzzy-Menge (unscharfe Menge, fuzzy set) über G .

Das Rechnen mit Fuzzy-Mengen bringt in aller Regel mit sich, daß die betreffenden Mengen ständig unscharfer werden. Das bedeutet, daß entweder die klassische Grundmenge, die auf das Intervall $[0, 1]$ abgebildet wird, größer wird, oder die Zugehörigkeitswerte $\mu_A(x)$ kleiner werden, oder beides. Das Resultat einer Operation mit zwei Fuzzy-Mengen ist am Ende meist eine völlig neue Menge mit anderer Grundmenge und/oder anderer Zugehörigkeitsfunktion. Repräsentiert man einen Quantity Space als Fuzzy-Menge und definiert z. B. eine Addition auf dieser Fuzzy-Menge, so fällt das Resultat in aller Regel nicht eine andere, vordefinierte Fuzzy-Menge aus der Menge der Quantity Spaces, sondern wird eine neue Fuzzy-Menge sein. Die Quantity Spaces wären also nicht abgeschlossen gegen die Addition, es sei denn, man sucht nach jedem Rechenschritt die Fuzzy-Menge aus den vordefinierten Quantity Spaces heraus, die dem Resultat am nächsten kommt. Dies ist aber vergleichsweise teuer, und aus Gründen der Vergleichbarkeit von Bewegungsverläufen wollen wir andererseits auch nicht, daß sich die Repräsentationen auf unterschiedliche Fuzzy-Mengen beziehen, sondern natürlich immer auf dieselben, vordefinierten. Deswegen haben wir uns dafür entschieden, bei einer scharfen Diskretisierung des Raumes zu bleiben, die Bewegungsvektoren unscharf zu modellieren und diese in die gewählte Diskretisierung abzubilden, wenn nötig und sinnvoll.

Bei Kombination von Richtungs- und Distanzintervallen wird der Raum in diskrete Flächen mit scharfen Grenzen parkettiert (siehe Abbildung 5). Jeder zweidimensionale (klas-

sische) Vektor fällt in genau eine dieser Flächen. Dies entspricht der Umwandlung in einen QMV mit diskreten Intervallen wie in Abschnitt 2 beschrieben.

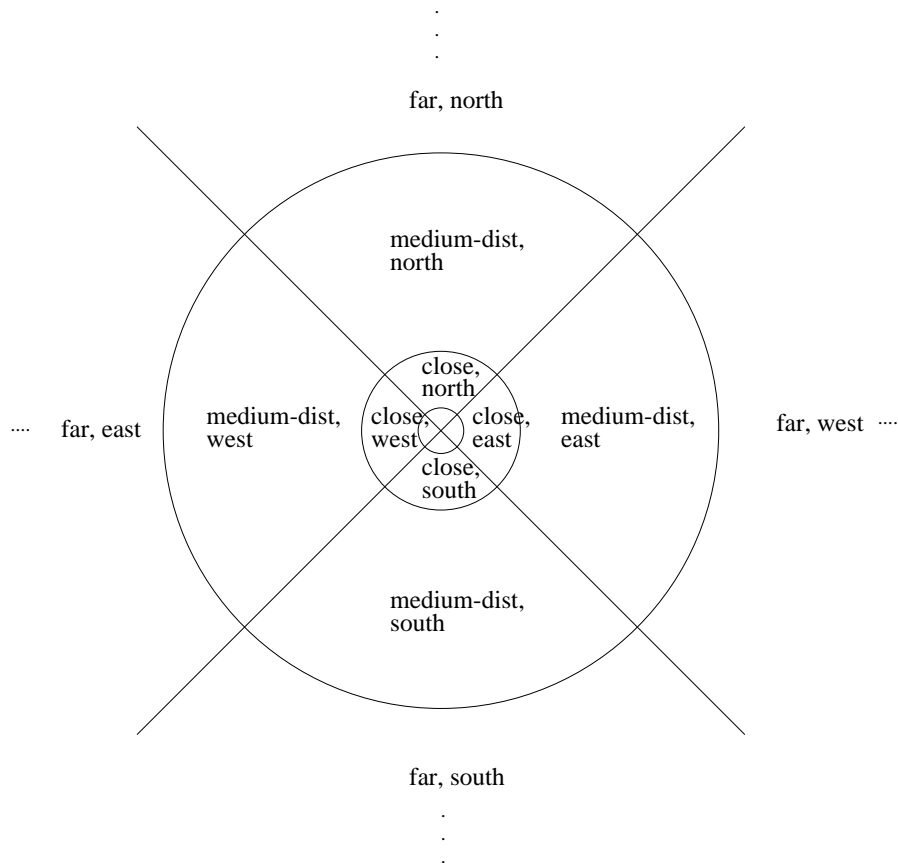


Abbildung 5: Kombination von Richtungs- und Distanzintervallen

3.1 Fuzzy Numerical Vectors

Wie kann man nun vermeiden, daß für Vektoren, die nahe irgendwelcher Intervallgrenzen liegen, eine entweder-oder-Entscheidung für ein bestimmtes Intervall getroffen werden muß und man Gefahr läuft, ähnliche, um die Intervallgrenzen verlaufende Bewegungsverläufe, unähnlich zu repräsentieren? Dazu setzt man bei der Modellierung der Bewegungsvektoren an.

Mit Meßfehlern behaftete numerische Daten lassen sich als Fuzzy-Zahlen modellieren:

Definition 3.2

Eine Fuzzy-Zahl A ist eine konvexe Fuzzy-Menge auf der Grundmenge der reellen Zahlen \mathbb{R} , die folgende Eigenschaften erfüllt (siehe [1], S. 124):

1. $\mu_A(x) = 1$ für genau ein $x \in \mathbb{R}$
2. μ_A ist stückweise stetig.

Fuzzy-Zahlen vom Typ LR sind besonders einfach zu handhaben.

Definition 3.3

Eine Fuzzy-Zahl heißt vom Typ LR , wenn es Referenzfunktionen L, R mit folgenden Eigenschaften gibt:

1. $L, R : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow [0, 1]$
2. $L(0) = R(0) = 1$
3. L und R sind monoton fallend.
4. $\mu_A(x) = \begin{cases} L(\frac{m-x}{\alpha}) & x \leq m, \\ R(\frac{x-m}{\beta}) & x > m. \end{cases}$ $\alpha > 0$ ist die linke Spannweite, $\beta > 0$ ist die rechte Spannweite, m der Gipfelwert von A . Man schreibt $A = (m, \alpha, \beta)_{LR}$.

Der Einfachheit halber benutzen wir im Weiteren Fuzzy-Zahlen mit $L = R = \max(0, 1-x)$. Dann können wir den Index LR auch weglassen. Außerdem modellieren wir den Gipfelwert immer mittig, d. h. linke und rechte Spannweite sind gleich ($\alpha = \beta$). Zur besseren Übersicht schreiben wir deswegen die Spannweite mit dem gleichen Buchstaben wie den Gipfelpunkt, nur mit einem Punkt: $A = (m, \dot{m}, \dot{m})$.

Ein Fuzzy-Bewegungsvektor im zweidimensionalen Raum soll nun modelliert werden als eine Funktion $\mu : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$. Dazu bieten sich verschiedene Möglichkeiten an:

1. Die Grundmenge $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ bildet eine Ellipse mit den Spannweiten der beiden Fuzzy-Koordinaten als Durchmesser; $\mu : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ ist dann ein Kegel über dieser Ellipse.
2. Die Grundmenge $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ bildet ein Rechteck mit den Spannweiten der beiden Fuzzy-Koordinaten als Seitenlängen; $\mu : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ ist dann ein Kegel über diesem Rechteck (Pyramide).
3. Die Grundmenge $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ bildet ein Kreis-/Ringsegment mit den Spannweiten der beiden Fuzzy-Koordinaten als Winkel und Radius (bzw Breite); $\mu : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ ist dann ein Kegel über diesem Kreis- bzw. Ringsegment (siehe Abbildung 6 für eine Darstellung dieser Grundmenge).

Betrachtet man die Diskretisierung der Ebene in Abbildung 5, wird man feststellen, daß die letzte Möglichkeit die natürlichste ist, wenn man Fuzzy-Vektoren in diese Parkettierung abbilden will: Dazu ist es nötig, den Fuzzy-Vektor mit der gegebenen Parkettierung zu schneiden und die Zugehörigkeiten zu den jeweiligen Kacheln zu berechnen. Modelliert man die Fuzzy-Vektoren als Kegel über einem Ringsegment, wobei der Ring seinen Mittelpunkt in der Mitte der Parkettierung hat (also am Fuße des Vektors), so erhält man bei Schnitten mit dieser Parkettierung als Grundflächen wiederum lauter Ringsegmente, deren anteilige Volumina leicht zu berechnen sind.

Definition 3.4

Sei $(r, \phi)^T$ ein numerischer Bewegungsvektor. Der Vektor $(R, \Phi)^T$ (R und Φ Fuzzy-Zahlen mit den Gipfelwerten r und ϕ) heißt zu $(r, \phi)^T$ gehöriger Fuzzy Numerical Vector (FNV).

Es gibt unendlich viele zu $(r, \phi)^T$ gehörige FNVs mit unterschiedlichen Spannweiten.

Definition 3.5

Sei $A = (R, \Phi)$ ein FNV mit $R = (r, \dot{r}, \ddot{r})$ und $\Phi = (\phi, \dot{\phi}, \ddot{\phi})$ vom Typ LR mit $L = R = \max(0, 1 - x)$. Dann ist

$$\mu_A(x, \alpha) = \mu_R(x)\mu_\Phi(\alpha).$$

3.2 Rechnen mit FNVs

Die Addition auf zwei Fuzzy-Zahlen vom gleichen Typ LR mit linker gleich rechter Spannweite ist folgendermaßen definiert (vgl. [1], S. 127):

Definition 3.6

Seien $A = (m, \dot{m}, \ddot{m})_{LR}$ und $B = (n, \dot{n}, \ddot{n})_{LR}$ Fuzzy-Zahlen vom gleichen Typ LR. Dann heiße die fuzzy Zahl $A \oplus B$ gemäß

$$A \oplus B = (m, \dot{m}, \ddot{m})_{LR} \oplus (n, \dot{n}, \ddot{n})_{LR} = (m + n, \dot{m} + \dot{n}, \ddot{m} + \ddot{n})_{LR}$$

die Summe der Fuzzy-Zahlen A und B .

Die Vektoraddition auf FNVs kann kanonisch definiert werden:

Definition 3.7

Seien

$$A = \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix}$$

FNVs mit X_i, Y_i Fuzzy-Zahlen vom gleichen Typ LR. Dann heißt der FNV

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} X_1 \oplus X_2 \\ Y_1 \oplus Y_2 \end{pmatrix}$$

die Summe der FNVs A und B .

Da unsere FNVs allerdings aufgrund der Modellierung in Polarkoordinaten vorliegen, muß für die Addition ein bißchen mehr Aufwand getrieben werden.

Für die Umrechnung von Polarkoordinaten in kartesische Koordinaten gilt ja bekanntlich:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos \phi \\ r \cdot \sin \phi \end{pmatrix}$$

Für die Addition der Gipfelwerte zweier FNVs $\begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r' \\ \phi' \end{pmatrix}$ gilt also:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos \phi + r' \cdot \cos \phi' \\ r \cdot \sin \phi + r' \cdot \sin \phi' \end{pmatrix}.$$

Sobald nichts mehr addiert werden soll, werden die Gipfelwerte wieder in Polarkoordinaten zurücktransformiert:

$$\begin{pmatrix} r'' \\ \phi'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x''^2 + y''^2} \\ \arctan \frac{y''}{x''} \end{pmatrix}$$

Die Spannweiten müssen anschließend gesondert berechnet werden; sie addieren sich einfach.

Definition 3.8

Seien

$$A = \begin{pmatrix} (r_1, \dot{r}_1, \ddot{r}_1) \\ (\phi_1, \dot{\phi}_1, \ddot{\phi}_1) \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} (r_2, \dot{r}_2, \ddot{r}_2) \\ (\phi_2, \dot{\phi}_2, \ddot{\phi}_2) \end{pmatrix}$$

FNVs in Polarkoordinaten mit Fuzzy-Zahlen vom gleichen Typ LR als Komponenten. Dann heißt der FNV

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} (\sqrt{(r_1 \cdot \cos \phi_1 + r_2 \cdot \cos \phi_2)^2 + (r_1 \cdot \sin \phi_1 + r_2 \cdot \sin \phi_2)^2}, \dot{r}_1 + \dot{r}_2, \ddot{r}_1 + \ddot{r}_2) \\ (\arctan \frac{r_1 \cdot \sin \phi_1 + r_2 \cdot \sin \phi_2}{r_1 \cdot \cos \phi_1 + r_2 \cdot \cos \phi_2}, \dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2, \ddot{\phi}_1 + \ddot{\phi}_2) \end{pmatrix}$$

die Summe der FNVs A und B.

3.3 Fuzzy Motion Vectors

Die FNVs werden durch wiederholte Addition natürlich immer unschärfer, d. h. die Spannweiten werden jedesmal größer. Das bedeutet, daß ein FNV einen recht großen Bereich der Ebene abdecken kann, in dem die Zugehörigkeitsfunktion Werte größer 0 annimmt. Dieser Bereich mitsamt seinen Fuzzy-Zugehörigkeitsfunktionen muß nun in die in Abbildung 5 dargestellte Diskretisierung der Ebene abgebildet werden.

Die Fuzzy-Zugehörigkeitsfunktion eines FNV A $\mu_A(r, \phi)$ ergibt einen Kegel über einem Kreis- bzw. Ringsegment. Dieser Kegel fällt möglicherweise in verschiedene Bereiche der in Abbildung 5 dargestellte Diskretisierung. Wieviel von der Kegel anteilig in welchem Bereich dieser Diskretisierung liegt, gibt nun genau der FMV (Fuzzy Motion Vector) an.

Definition 3.9

Gegeben sei eine Diskretisierung des Raums in n Distanzbereiche und m Richtungsbe-
reiche. Ein FMV F auf dieser Diskretisierung ist ein $n \cdot m$ -Tupel mit Komponenten aus
dem Intervall $[0, 1] \in \mathbb{R}$:

$$F = (\mu(\text{Dist}_1, \text{Dir}_1), \dots, \mu(\text{Dist}_1, \text{Dir}_m), \dots, \mu(\text{Dist}_n, \text{Dir}_1), \dots, \mu(\text{Dist}_n, \text{Dir}_m))^T$$

Jede Komponente des FMV steht für eine Kachel der Parkettierung, wie in Abbildung 5 zu erkennen.

3.4 Abbildung FNV in FMV

Um einen FNV A in einen FMV $A_{n \cdot m}$ abzubilden, muß man feststellen, in welchen Teilen der diskreten Parkettierung überhaupt Funktionswerte größer Null angenommen werden und wieviel Anteil vom Volumen des durch $\mu_A(r, \phi)$ definierten Kegels in jeden dieser Teile fällt. Dazu muß $\mu_A(r, \phi)$ mit den Kreisen und Geraden (bzw. Zylindern und Ebenen), die die Distanz- und Richtungsbe-
reiche begrenzen, geschnitten werden. Daraus ergeben sich Teilvolumina, deren Anteile am Gesamtvolumen des FNV A wiederum den Zugehörigkeitsgrad des FNV zu dem jeweiligen Richtungs-/Distanzbereich ergeben.

Das Gesamtvolumen des Kegels $\mu_A(r, \phi)$ ist relativ einfach zu berechnen. Im Folgenden rechnen wir oBdA mit einem FNV $A = \begin{pmatrix} (0, \dot{r}, \dot{r}) \\ (0, \dot{\phi}, \dot{\phi}) \end{pmatrix}$. Dann ist

$$\mu_A(r, \phi) = \left(1 - \frac{\phi}{\dot{\phi}}\right) \left(1 - \frac{r}{\dot{r}}\right).$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} V &= \int_{-\dot{r}}^{\dot{r}} \int_{-\dot{\phi}}^{\dot{\phi}} \left(1 - \frac{\phi}{\dot{\phi}}\right) \left(1 - \frac{r}{\dot{r}}\right) d\phi dr \\ &= \frac{1}{\dot{\phi}\dot{r}} \int_{-\dot{r}}^{\dot{r}} \int_{-\dot{\phi}}^{\dot{\phi}} (\dot{\phi} - \phi)(\dot{r} - r) d\phi dr \\ &= \frac{1}{\dot{\phi}\dot{r}} \left(\int_{-\dot{r}}^{\dot{r}} \int_{-\dot{\phi}}^{\dot{\phi}} \dot{\phi}\dot{r} d\phi dr + \int_{-\dot{r}}^{\dot{r}} \int_{-\dot{\phi}}^{\dot{\phi}} \dot{\phi}r d\phi dr + \int_{-\dot{r}}^{\dot{r}} \int_{-\dot{\phi}}^{\dot{\phi}} \phi\dot{r} d\phi dr + \int_{-\dot{r}}^{\dot{r}} \int_{-\dot{\phi}}^{\dot{\phi}} \phi r d\phi dr \right) \end{aligned}$$

Dies sind alles Integrale linearer Funktionen. Durch die konstanten Integrationsgrenzen sind sie relativ einfach zu berechnen. Um die Teilvolumina zu bestimmen, die auf die jeweiligen Kacheln der Parkettierung entfallen, muß der Kegel des FNV mit den Grenzen der Parkettierung geschnitten werden. Die Mitte des Richtungskreuzes und der Mittelpunkt der konzentrischen Distanzkreise fällt dabei auf den Fuß des FNV. Da die Kacheln der Parkettierung die gleiche Gestalt haben wie die Grundfläche des FNV (Kreis- oder Ringsegment, wobei der Kreismittelpunkt am Fuß des FNV liegt), ist diese Operation abgeschlossen: Als Ergebnis erhält man wiederum jeweils ein Kreis- oder Ringsegment (siehe Abbildung 6).

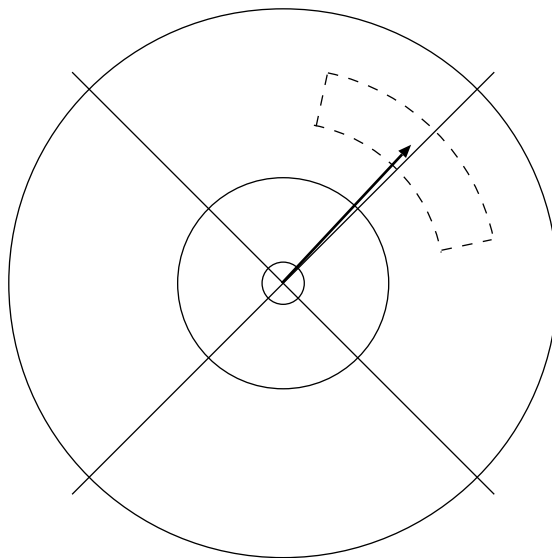


Abbildung 6: Abbildung FNV \rightarrow FMV

Es müssen zwei Arten von Schnitten berechnet werden:

1. Schneiden mit einer Richtungsbegrenzung (bei 4 Richtungen die Geraden $x = y$ bzw $x = -y$): dabei ändern sich die die Grenzen des Integrals $\int_{-r}^r dr$ nicht.
2. Schneiden mit einem Kreisbogen: dabei ändern sich die die Grenzen des Integrals $\int_{-\phi}^{\phi} d\phi$ nicht.

Ansonsten müssen bei o.a. Volumenberechnung lediglich die Integrationsgrenzen geändert werden!

Das auf jede Kachel ($Dist, Dir$) entfallende Teilvolumen $TV_{(Dist,Dir)}$ in Relation zum Gesamtvolumen V des FNV ergibt den Wert der Mitgliedschaftsfunktion $\mu_{(Dist,Dir)}$:

$$\mu_{(Dist_i, Dir_j)} = \frac{TV_{(Dist_i, Dir_j)}}{V}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m.$$

Der Gipfelpunkt des in Abbildung 6 dargestellten FNV fällt in die Kachel (*medium-dist, north*). Der Gipfelpunkt eines nur minimal nach rechts abweichenden Vektors gleicher Länge fiel in die Kachel (*medium-dist, east*). Als QMVs würden diese beiden Vektoren also mit völlig unterschiedlichen Richtungen repräsentiert werden, obwohl sie sich kaum unterscheiden. Repräsentiert man diese Vektoren jedoch als FMV, so ist das Ergebnis in dieser Beziehung schon erfreulicher: es wären alle $\mu_{(Dist_i, Dir_j)} = 0$, außer $\mu_{(medium-dist, north)}$ und $\mu_{(medium-dist, east)}$, die jeweils ungefähr den Wert 0,5 annehmen würden. Vergleicht man die resultierenden FMVs miteinander, so stellt man fest, daß sie ganz ähnlich sind, während man dies bei den QMVs nicht sagen kann.

Die Abbildung von FNV in FMV ist zwar nicht unbedingt trivial. Allerdings muß sie für Algorithmen nicht in jedem Rechenschritt stattfinden, sondern nur, wenn Vergleiche oder Ausgaben gemacht werden müssen. Solange kann man mit den FNVs rechnen, was denkbar einfach ist.

3.5 Abbildung FMV in QMV

Nun sind FMV-Sequenzen zwar hervorragend vergleichbar, aber für einen naiven Benutzer eines technischen Systems ebenso unhandlich wie jede andere numerische Repräsentation, wenn nicht sogar noch unintuitiver. Für die Benutzerinteraktion ist diese Repräsentation also ungeeignet und muß für die Ausgabe an die Benutzerschnittstelle in einen QMV umgewandelt werden. Dies erreicht man einfach mit einer Maximumsfunktion über FMVs:

Definition 3.10

Sei A_c ein $n \cdot m$ -FMV. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \max(A_c) = & \\ \max(\mu_{(Dist_1, Dir_1)}, \dots, \mu_{(Dist_1, Dir_m)}, \dots, \mu_{(Dist_n, Dir_1)}, \dots, \mu_{(Dist_n, Dir_m)})^T = & \\ (Dist_x, Dir_y) \text{ mit } \mu_{(Dist_x, Dir_y)} > \mu_{(Dist_i, Dir_j)} \forall (i, j) \in (n \times m) (i, j \neq x, y). & \end{aligned}$$

3.6 Abbildung QMV in FNV

Umgekehrt möchte man diese Repräsentation auch bei Benutzereingaben vermeiden. Deswegen muß es auch eine Möglichkeit geben, QMVs in FNVs umzuwandeln. Dabei kann natürlich nicht irgendeine Meßgenauigkeit als Maßstab für die Spannweite der Fuzzy-Zahlen dienen. Man weiß allerdings genau, welche Kachel der Parkettierung der QMV $\langle Dist_i, Dir_j \rangle$ repräsentiert, nämlich natürlich die Kachel $(Dist_i, Dir_j)$. Deswegen kann man bei der Umwandlung eines solchen QMV als Gipfelpunkt die Mitte der jeweiligen Intervalle benutzen.

Wie man die Spannweiten definiert, ist eine Frage der Anwendung. Wenn man jeweils genau die Hälfte der betreffenden Intervallbreite als Spannweite nimmt, erhält man natürlich als Grundfläche des FNV genau die Kachel $(Dist_i, Dir_j)$ der Parkettierung. Das bedeutet aber auch, daß, wenn man den so erhaltenen FNV in einen FMV umwandelt, alle $\mu_{(Dist_k, Dir_l)}$ mit $k \neq i$ und $l \neq j$ Null werden und $\mu_{(Dist_i, Dir_j)} = 1$. Wenn man QMV-Sequenzen vergleichen will und die oben beschriebenen negativen Effekte vermeiden, ist dies sicher nicht geschickt, wohingegen diese Abbildung gut gewählt ist, wenn man mit den FNVs weiterrechnen will. Für den reinen Vergleich ist eine überlappende Modellierung, wie in Abbildung 7 für die Richtungsdomäne dargestellt, sicher besser, da dann auch Anteile des FNV in die benachbarten Kacheln fallen.

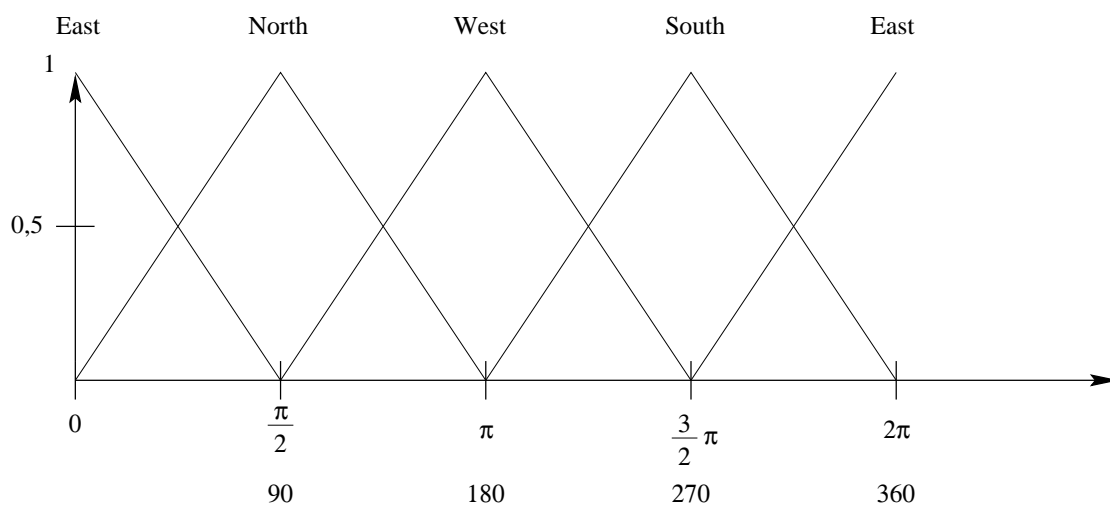


Abbildung 7: Fuzzy-Richtungen

4 Ähnlichkeit von Bewegungsverläufen

4.1 QMV-Sequenzen

QMV-Sequenzen lassen sich wegen der angesprochenen Probleme nur schwer vergleichen. Betrachten wir im Folgenden zunächst Vergleiche der Spur. Dazu faßt man alle aufeinanderfolgenden QMVs der gleichen Richtung, die lediglich Geschwindigkeitsänderungen enthalten, zu einem einzigen QMV zusammen.

4.1.1 Allozentrische Ähnlichkeit

Definition 4.1

Zwei QMVs, deren allozentrische Richtung und Distanz um nicht mehr als ein Intervall voneinander abweichen, heißen allozentrisch ähnlich.

Zwei QMV-Sequenzen, deren QMVs komponentenweise allozentrisch ähnlich sind, heißen ebenfalls allozentrisch ähnlich.

Man bemerkt sofort die Problematik: Wenn jede Komponente der QMV-Sequenzen jeweils um ein Intervall abweicht, dann können die ursprünglichen Sequenzen zwar so ähnlich gewesen sein wie in Abbildung 4, aber es ist auch möglich, daß sie völlig unähnlich waren. Weil wir das nicht wissen, müssen wir auch solche QMV-Sequenzen noch als ähnlich akzeptieren.

4.1.2 Egozentrische Ähnlichkeit

Für die egozentrischen Richtungsangaben gilt dasselbe Prinzip wie für die allozentrischen Richtungen:

Definition 4.2

Zwei QMVs, deren egozentrische Richtung und Distanz um nicht mehr als ein Intervall voneinander abweichen, heißen egozentrisch ähnlich.

Zwei QMV-Sequenzen, deren QMVs komponentenweise egozentrisch ähnlich sind, heißen ebenfalls egozentrisch ähnlich.

Die egozentrische Ähnlichkeit ist orientierungsunabhängig. Identische Bewegungsverläufe, die in verschiedene allozentrische Richtungen gestartet wurden, sind nicht mehr allozentrisch ähnlich, aber sehr wohl egozentrisch ähnlich.

4.1.3 Vergleich der Dynamik

Egozentrische und allozentrische Ähnlichkeit können um einen Vergleich der Dynamik erweitert werden.

Definition 4.3

Zwei QMVs, die egozentrisch (allozentrisch) ähnlich sind, und deren Geschwindigkeiten um nicht mehr als ein Intervall voneinander abweichen, heißen dynamisch egozentrisch (allozentrisch) ähnlich.

Zwei QMV-Sequenzen, deren QMVs komponentenweise dynamisch egozentrisch (allozentrisch) ähnlich sind, heißen ebenfalls dynamisch egozentrisch (allozentrisch) ähnlich.

4.1.4 Ergebnisse

Beispiel 4.1

q_1 und q_2 sind QMV-Sequenzen mit 8 Richtungsbereichen und 5 Distanzbereichen.

q_1 : <very-far east slow> <very-far south fast> <far west fast>

q_2 : <far north fast> <far east slow> <very-far south very-fast>

q_1 und q_2 sind nicht allozentrisch ähnlich, da die Richtungen der QMV's jeweils um mehr ein Intervall voneinander abweichen.

Rechnet man die QMV-Sequenzen in das egozentrische Referenzsystem um, ergibt sich folgendes:

q_1 : <very-far forward slow> <very-far right fast> <far right fast>

q_2 : <far forward fast> <far right slow> <very-far right very-fast>

Nun sind bei beiden QMV-Sequenzen die egozentrischen Richtungen identisch. Die Distanzen weichen jeweils nicht weiter als ein Intervall voneinander ab, was bedeutet, daß q_1 und q_2 egozentrisch ähnlich sind.

Vergleicht man die Geschwindigkeiten der Vektoren in q_1 und q_2 , stellt man fest, daß sie nicht dynamisch ähnlich sind.

Das Beispiel macht deutlich, daß die orientierungsunabhängige egozentrische Ähnlichkeit am ehesten geeignet ist, Bewegungsspuren nur bezüglich ihrer Form zu vergleichen. Allozentrische Ähnlichkeit ist nicht orientierungsunabhängig und sollte deswegen da eingesetzt werden, wo es darum geht, zu vergleichen, ob zwei Bewegungsspuren eine ähnliche Route darstellen könnten. Es ist auch möglich, hier egozentrische Ähnlichkeit mit einem Vergleich der Ausgangsorientierungen zu benutzen, was im Grunde dasselbe ist.

Allgemein ist allerdings die QMV-Repräsentation für Vergleiche eher ungeeignet. Wenn man nicht das Risiko eingehen will, daß die QMV-Repräsentation sehr ähnlicher Sequenzen beim Vergleich als unähnlich eingestuft wird, muß man beim Vergleich von QMV-Sequenzen Sequenzen, die möglicherweise sehr unähnlich sind, als ähnlich akzeptieren.

4.2 Fuzzy-Ähnlichkeit

Die FMV-Repräsentation, wie sie in Abschnitt 3 eingeführt wurde, ist für Vergleiche besser geeignet. Hier kann man nicht nur entscheiden, ob die Sequenzen ähnlich sind oder nicht, sondern auch ein Abstandsmaß definieren.

Jede Komponente des FMV definiert den Anteil, zu dem der Vektor in eine bestimmte Kachel der Parkettierung fällt. Als Abstandsmaß zwischen zwei Vektoren kann man einfach die komponentenweise Differenz nehmen:

Definition 4.4

Seien

$$A_1 = (\mu_{(Dist_{1_1}, Dir_{1_1})}, \dots, \mu_{(Dist_{1_1}, Dir_{1_m})}, \dots, \mu_{(Dist_{1_n}, Dir_{1_1})}, \dots, \mu_{(Dist_{1_n}, Dir_{1_m})})^T$$

und

$$A_2 = (\mu_{(Dist_{2_1}, Dir_{2_1})}, \dots, \mu_{(Dist_{2_1}, Dir_{2_m})}, \dots, \mu_{(Dist_{2_n}, Dir_{2_1})}, \dots, \mu_{(Dist_{2_n}, Dir_{2_m})})^T$$

zwei $n \cdot m$ -FMV. Dann heißt

$$\mathcal{D}_{\text{FMV}}(A_1, A_2) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |\mu_{(Dist_{1_i}, Dir_{1_j})} - \mu_{(Dist_{2_i}, Dir_{2_j})}|$$

der Abstand zwischen A_1 und A_2 .

Der minimale Abstand zwischen zwei FMVs ist 0 (Identität), der maximale Abstand ist 2: Die $\mu_{(Dist_i, Dir_j)}$ in jedem FMV addieren sich zu 1. Wenn in jedem Vektor genau die Komponenten ungleich 0 sind, die im anderen 0 sind, dann ist der Abstand $\mathcal{D}_{\text{FMV}} = 2$ und damit maximal.

Definition 4.5

Seien $S_1 = A_1 \dots A_n$ und $S_2 = B_1 \dots B_n$ Sequenzen vom FMVs. Dann heißt

$$\mathcal{D}_{\text{FMVS}}(S_1, S_2) = \sum_{j=1}^n \mathcal{D}_{\text{FMV}}(A_j, B_j)$$

der Abstand zwischen S_1 und S_2 .

Der maximale Abstand zwischen zwei FMV-Sequenzen ist $2n$, wobei n die Länge der Sequenzen ist. Der minimale Abstand ist 0 (Identität).

Beispiel 4.2

A_1, A_2, A_3 sind $3 \cdot 2$ -FMVs.

$A_1 = (0, 0, 0, 3, 0, 7, 0, 0)^T$, $A_2 = (0, 3, 0, 7, 0, 0, 0, 0)^T$. $\mathcal{D}_{\text{FMV}}(A_1, A_2) = 0, 3 + 0, 7 + 0, 3 + 0, 7 + 0 + 0 = 2$.

$A_3 = (0, 0, 0, 2, 0, 5, 0, 3, 0)^T$; $\mathcal{D}_{\text{FMV}}(A_1, A_3) = 0 + 0 + 0, 1 + 0, 2 + 0, 3 = 0, 6$.

Manche FMVs mit Abstand 2 können allerdings ähnlicher sein als andere: Der Abstand 2 sagt nur, daß die Zugehörigkeitswerte ungleich 0 alle auf unterschiedlichen Kacheln liegen, aber nicht, wie weit diese Kacheln voneinander weg sind. Bei FMVs mit Abstand 2 könnte man deswegen noch zusätzlich den „metrischen“ Abstand der belegten Kacheln betrachten. Dazu muß man zunächst eine Metrik auf der Parkettierung des Raumes definieren, was ein Punkt für eine zukünftige Ergänzung der Repräsentation ist.

5 Zusammenfassung

Qualitative Repräsentationen sind für die Benutzerinteraktion gut geeignet. Bei der Repräsentation von Bewegungsverläufen durch Intervalle mit scharfen Grenzen ergibt sich das Problem, daß ganz ähnliche numerische Bewegungsverläufe möglicherweise in sehr unähnlichen qualitativen Repräsentationen resultieren. Durch die Modellierung dieser numerischen Bewegungsverläufe als Sequenzen von FNVs kann dieses Problem bei Verwendung einer anderen unscharfen Repräsentation zunächst umgangen werden. Durch die Abbildung der FNVs auf die durch die Diskretisierung der qualitativen Repräsentation entstandenen Parkettierung des Raums in FMVs wird eine Fuzzy-Basis der qualitativen Bewegungsrepräsentation geschaffen, die sowohl durch Meßungenauigkeit oder Weiterverarbeitung entstandene Unschärfen als auch die qualitativen Richtungs- und Entfernungsbereiche widerspiegelt. In dieser Repräsentation sind Bewegungsverläufe besser vergleichbar als wenn sie als QMV-Sequenzen vorliegen, da quantitative Ähnlichkeitsmaße definiert werden können. Für die Benutzeraus- und -eingabe können FMV-Sequenzen problemlos in QMV-Sequenzen umgewandelt werden (und umgekehrt).

Diese Fuzzy-Basis der qualitativen Bewegungsrepräsentation muß ihre Praxistauglichkeit in einer Implementierung allerdings erst noch unter Beweis stellen.

Literatur

- [1] BÖHME, GERT: *Fuzzy-Logik*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1993.
- [2] CLEMENTINI, ELISEO, PAOLINO DI FELICE und DANIEL HERNÁNDEZ: *Qualitative representation of positional information*. *Artificial Intelligence*, 95(2):317–356, 1997.
- [3] GENTNER, DEDRE und ALBERT L. STEVENS (Herausgeber): *Mental Models*. Lawrence Erlbaum, Hillsdale, NJ, 1983.
- [4] MUSTO, ALEXANDRA, KLAUS STEIN, ANDREAS EISENKOLB und THOMAS RÖFER: *Qualitative and Quantitative Representations of Locomotion and their Application in Robot Navigation*. In: DEAN, THOMAS (Herausgeber): *Proceedings of the Sixteenth International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI-99)*, Seiten 1067–1073, San Francisco, CA, August 1999. Morgan Kaufman Publishers, Inc.
- [5] MUSTO, ALEXANDRA, KLAUS STEIN, ANDREAS EISENKOLB, KERSTIN SCHILL und WILFRIED BRAUER: *Generalization, Segmentation and Classification of Qualitative Motion Data*. In: PRADE, HENRI (Herausgeber): *Proceedings of the 13th European Conference on Artificial Intelligence (ECAI-98)*, Seiten 180–184. John Wiley & Sons, 1998.

- [6] MUSTO, ALEXANDRA, KLAUS STEIN, KERSTIN SCHILL, ANDREAS EISENKOLB und WILFRIED BRAUER: *Qualitative Motion Representation in Egocentric and Allocentric Frames of Reference*. In: FREKSA, CHRISTIAN und DAVID M. MARK (Herausgeber): *Spatial Information Theory. Cognitive and Computational Foundations of Geographic Information Science. International Conference COSIT'99*, Band 1661 der Reihe *Lecture Notes in Computer Science*, Seiten 461–476, Berlin, Heidelberg, New York, August 1999. Springer.
- [7] SADALLA, E.K., W.J. BURROUGHS und L.J STAPLIN: *Reference Points in Spatial Cognition*. *Journal of Experimental Psychology: Human Learning and Memory*, 6:516–528, 1980.
- [8] TVERSKY, BARBARA: *Cognitive Maps, Cognitive Collages, and Spatial Mental Models*. In: FRANK, ANDREW U. und IRENE CAMPARI (Herausgeber): *Spatial Information Theory. A Theoretical Basis for GIS. European Conference, COSIT'93*, Band 716 der Reihe *Lecture Notes in Computer Science*, Seiten 14–24, Berlin, Heidelberg, New York, September 1993. Springer.