Aufgabe 1.1

(a) Zeichnen Sie einen einfachen Graphen mit der Gradsequenz $(1, 2, 2, 2, 3, 4)$.

(b) Ist jeder einfache Graph mit der Gradsequenz $(1, 2, 2, 2, 3, 4)$ zusammenhängend?

(c) Hat jeder einfache Graph mit der Gradsequenz $(1, 2, 2, 2, 3, 4)$ einen Eulerkreis?

(d) Hat jeder einfache Graph mit der Gradsequenz $(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 4, 4)$ einen Eulerkreis?

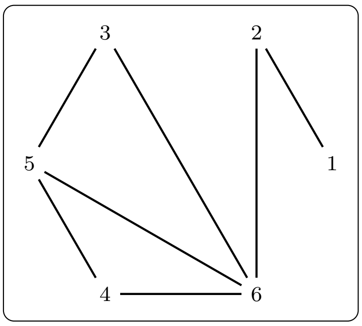
(e) Gibt es einen Baum mit der Gradsequenz $(1, 1, 2, 2, 2, 2)$?

(f) Gibt es einen einfachen Graphen mit der Gradsequenz $(1, 1, 2, 2, 4, 4)$, der kreisfrei ist?

(g) Gibt es einen einfachen Graphen mit der Gradsequenz $(4, 4, 5, 5, 5, 5)$, der planar ist?

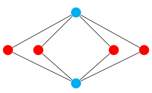
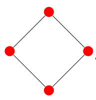
(h) Ist jeder einfache Graph mit der Gradsequenz $(2, 3, 3, 3, 4, 5)$ 4-färbbar?

Lösungsvorschlag

(a) 

(b) Graphen mit dieser Gradsequenz haben 6 Knoten. Sei v der Knoten von Grad 4. Die 4 Nachbarn von v sind mit v direkt verbunden. Der Knoten, der übrig bleibt, hat einen Grad ≥ 1 und ist deshalb mit einem Nachbarn von v direkt verbunden. Der Graph ist also zusammenhängend.

(c) Da ein solcher Graph stets zusammenhängend ist, jedoch Knoten von ungeradem Grad besitzt, hat er nie einen Eulerkreis.

(d) Es gibt einen nicht-zusammenhängenden Graphen mit dieser Gradsequenz. Der Graph hat zwei Zusamenhangskomponenten mit Gradsequenzen $(2, 2, 2, 2)$ (Kreis mit 4 Knoten) und $(2, 2, 2, 2, 4, 4)$ (zwei Kreise mit 4 Knoten, die sich zwei Knoten teilen). Dieser Graph hat keinen Eulerkreis, da er sich wie folgt in zwei separaten Zusammenhangskomponenten realisieren lässt:  und .

(e) Ja. Ein Pfad mit 6 Knoten und 5 Kanten:

(f) Nein.

Lösung 1: Alle Graphen mit dieser Gradsequenz sind zusammenhängend (analog zu (a)). Jeder zusammenhängende Graph mit $n > 2$ Knoten und n oder mehr Kanten besitzt einen Kreis (Vorlesung).

Lösung 2: Seien u, v die zwei Knoten von Grad 4. Diese Knoten müssen miteinander verbunden sein (sonst müssten beide mit den Knoten von Grad 1 verbunden sein; dies ist im Widerspruch dazu, dass der Knoten Grad 1 hat). Da es nur 6 Knoten gibt, müssen u und v auch mindestens einen gemeinsamen Nachbar w haben. Damit bilden u, v und w einen Kreis.

Lösung 3: Alle Graphen mit dieser Gradsequenz sind zusammenhängend (analog zu (a)). Da $2\,|E| = \sum_i d_i = 14 > 2(6-1) = 2(|V|-1)$, sind diese Graphen keine Bäume. Damit enthälten diese Graphen stets einen Kreis.

Lösung 4: (für Variante 2, 3, 4, 5) Einfache kreisfreie Graphen sind im Allgemeinen Wälder, also eine Sammlung von Zusammenhangskomponenten, die jeweils ein Baum sind. Damit eine Zusammenhangskomponente ein Baum ist, gilt laut Vorlesung für die entsprechende Gradsequenz, dass sie entweder einen Knoten mit Grad 0 oder mindestens zwei Knoten mit Grad 1 enthält. Da in der gegebenen Gradsequenz weder 0 noch zwei Einsen vorliegen, kann diese Gradsequenz nicht durch einen kreisfreien Graphen realisiert werden.

(g) Nein.

Lösung 1: Für einen planaren Graphen mit mindestens 3 Knoten gilt laut Vorlesung $|E| \leq 3\,|V| - 6$. Daraus folgt, dass Graphen, die mindestens 3 Knoten haben und für die $|E| > 3\,|V| - 6$ gilt, nicht planar sein können. Graphen mit dieser Gradsequenz haben 6 Knoten und erfüllen $|E| = \frac{1}{2}\sum_i d_i = 14 > 12 = 3 \cdot 6 - 6 = 3\,|V| - 6$. Damit kann kein solcher Graph planar sein.

Lösung 2: Wir zeigen, dass der $K_{3,3}$ ein Minor ist. Seien v_1, v_2, v_3 drei der Knoten mit Grad 5 und seien u_1, u_2, u_3 die anderen 3 Knoten. Die Knoten v_1, v_2, v_3 sind mit allen anderen Knoten verbunden. Damit ist (v_i, u_j) eine Kante für alle $1 \leq i, j \leq 3$. Aus dem Satz von Kuratowski folgt, dass Graphen mit dieser Gradsequenz nich planar sind.

Lösung 3: Wir zeigen, dass der K_5 ein Minor ist. Seien $v_1, \ldots, v_4$ die 4 Knoten von Grad 5. Sei v_5 einer der zwei Knoten von Grad 4. Die Knoten $v_1, \ldots, v_4$ sind mit allen anderen Knoten verbunden, insbesondere untereinander und mit v_5. Damit ist der von $\{v_1, \ldots, v_5\}$ induzieretn Teilgraphen einen K_5.

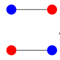
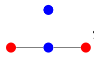
(h) **Lösung 1:** Wir zeigen, dass diese Graphen planar sind und wenden den Vier-Farben-Satz an. Wir zeigen, dass weder der $K_{3,3,}$ noch der K_5 Minoren sein können.

Die Graphen haben 6 Knoten, genau so viele wie der $K_{3,3}$. Jede Kontraktion entfernt einen Knoten. Da ein Grad geringer ist als drei und keine Kontraktionen möglich sind, kann $K_{3,3}$ kein Minor sein.

Der K_5 soll nach genau einer Kontraktion erhalten werden. Das ist jedoch nicht möglich, denn eine Kantenkontraktion ändert den Grad von höchstens einen Knoten. Damit bleibt immer einen Knoten mit Grad kleiner als 4 zurück.

Lösung 2: Sei G ein Graph mit der angegeben Gradsequenz. Wir geben den Knoten mit Grad 5 die Farbe a. Wir beachten ihn nicht weiter und erhalten als Teilproblem einen Graphen G' mit Gradsequenz $(1, 2, 2, 2, 3)$, der 3-Färbbar sein muss.

Wir geben den Knoten mit Grad 3 die Farbe b. Wir beachten ihn nicht weiter und erhalten als Teilproblem einen Graphen G'' mit Gradsequenz $(1, 1, 1, 1)$ oder $(0, 1, 1, 2)$, der 2-Färbbar sein muss.

Wenn G'' Gradsequenz $(1, 1, 1, 1)$ hat, dann ist er isomorph zu , der offensichtlich 2-Färbbar ist. Wenn G'' Gradsequenz $(0, 1, 1, 2)$ hat, dann ist er isomorph zu , der offensichtlich 2-Färbbar ist.

Lösung 3: (für Variante 2, 3) Laut Vorlesung gilt für einen einfachen Graphen $G = (V, E)$ und die chromatische Zahl $\chi(G)$ dieses Graphen, dass $\chi(G) \leq \max\{\mathtt{deg}(v) : v \in V\} + 1$. Für jede Gradsequenz, deren maximaler Grad 3 ist, gilt, dass jede Realisierung R also auch Grad 3 als maximalen Grad hat. Demnach ist die chromatische Zahl $\chi(R) \leq 3 + 1 = 4$. Also ist R 4-färbbar.

Für Variante 1, 4, 5 erhält man mit der selben Argumentation $\chi(R) \leq 4 + 1 = 5$. Daraus folgt lediglich, dass fünf Farben zur Färbung des Graphen R ausreichen. Es ist jedoch zu zeigen, dass die Graphen mit vier Farben zu färben sind. Daher ist dies in den Varianten 1, 4, 5 kein schlüssiges Argument.

Lösung 4: (für Variante 2, 3, 4, 5) Laut Vorlesung gilt für einen einfachen Graphen $G = (V, E)$ und die chromatische Zahl $\chi(G)$ dieses Graphen, dass $\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2 \cdot |E| + \frac{1}{4}}$. Für jede Realisierung $R = (V_R, E_R)$ einer Gradsequenz für die $|E_R| \leq 9$ gilt, gilt auch

$$\chi(R) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2 \cdot |E_R| + \frac{1}{4}} \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2 \cdot 9 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} + \sqrt{18.25} < 5.$$

Also ist R 4-färbbar.

Lösung 5: (für Variante 2, 3, 4, 5) Nach Aufgabe 1.7 (d), 2.7 (g), 3.7 (g), 4.7 (a), 5.7 (d) sind alle Graphen mit acht oder weniger Kanten planar und damit nach dem Vier-Farben-Satz 4-färbbar. Für jede Realisierung $R = (V_R, E_R)$ der gegebenen Gradsequenzen gilt, dass $|E_R| \leq 8$ und damit die Planarität und dementsprechend die 4-Färbbarkeit.

Aufgabe 1.2

Gegeben sind die folgenden aussagenlogischen Formeln F, G, H über den Variablen u, w, y, z:

$$F = (G \leftrightarrow H) \qquad G = ((y \vee w) \leftrightarrow \neg u) \qquad H = ((z \oplus w) \leftrightarrow u)$$

Hinweis: Wir benützen $\oplus$ als Symbol für das exklusive Oder (xor).

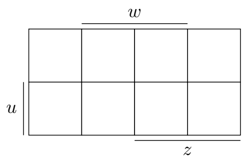
(a) Zeichnen Sie den Syntaxbaum von F. Es ist die Darstellung aus der Vorlesung verlangt.

(b) Stellen Sie den Wahrheitswerteverlauf von G entsprechend der Vorlesung dar.

Sollte sich der Wahrheitswert einer Teilformel für eine gegebene minimale Belegung bereits eindeutig aus dem Wahrheitswert ihrer linken Teilformel ergeben, so muss die rechte Teilformel nicht ausgewertet werden.

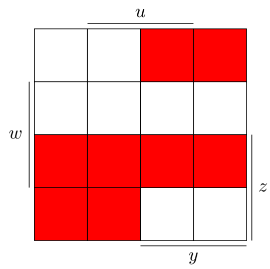
Verwenden Sie als Tabellenkopf die folgenden Vorlagen: $u \quad w \quad y \mid ((y \quad \vee \quad w) \quad \leftrightarrow \quad \neg \quad u)$

(c) Stellen Sie für H das zugehörige KV-Diagramm auf. Übertragen Sie hierfür die folgende Vorlage auf Ihren Antwortbogen:



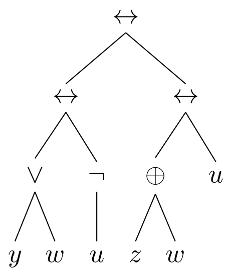
(d) Geben Sie eine zu F semantisch äquivalente Formel K_F in KNF an, sodass K_F nicht aus mehr als 3 Klauseln besteht.

Sie dürfen hierfür das folgende KV-Diagramm für F zu Grunde legen:



Lösungsvorschlag

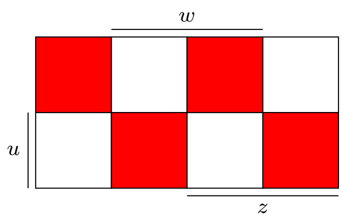
(a) Syntaxbaum zu F:



(b) Wahrheitstabellen zu G:

u	w	y	$((y$	$\vee$	$w)$	$\leftrightarrow$	$\neg$	$u)$
0	0	0		0		0	1	
0	0	1		1		1	1	
0	1	0		1		1	1	
0	1	1		1		1	1	
1	0	0		0		1	0	
1	0	1		1		0	0	
1	1	0		1		0	0	
1	1	1		1		0	0	

(c) KV- Diagramm zu H:



(d) Zu F semantisch äquivalente Formel in KNF:

$$\{\{w, \neg y, \neg z\}, \{z, \neg w\}, \{y, z\}\}$$

<u>Aufgabe 1.3</u>

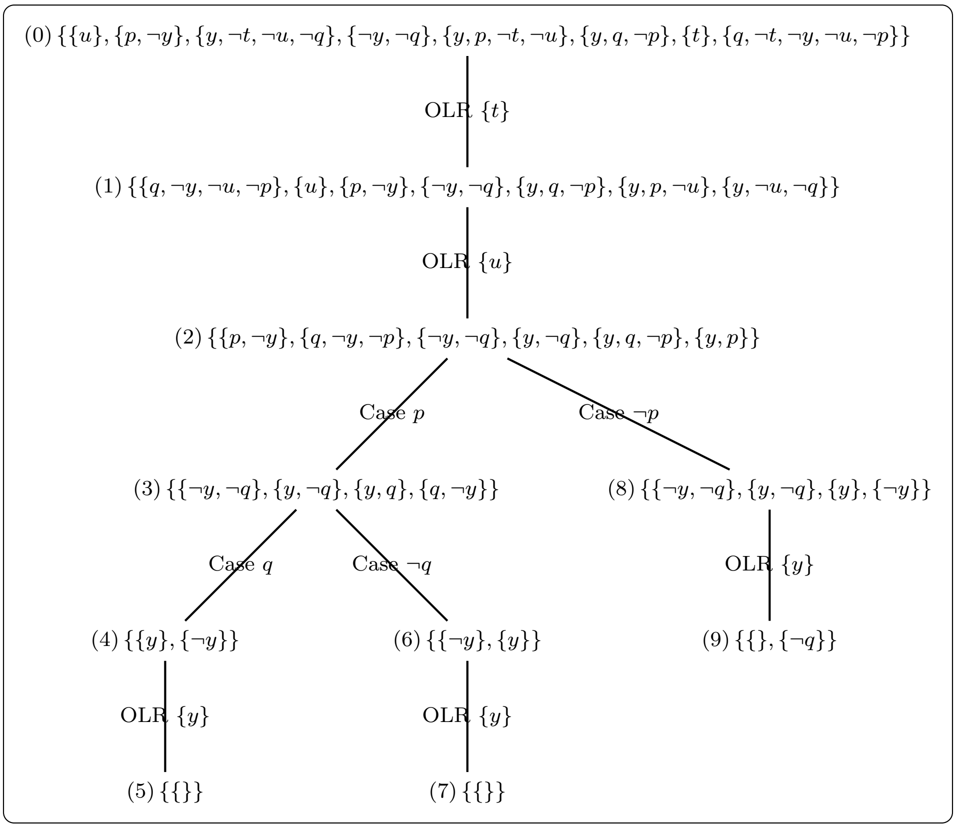
Gegeben ist die folgende aussagenlogische Formel F in den Variablen p, q, t, u, y in Klauselmengendarstellung:

$$\{\{u\}, \{p, \neg y\}, \{y, \neg t, \neg u, \neg q\}, \{\neg y, \neg q\}, \{y, p, \neg t, \neg u\}, \{y, q, \neg p\}, \{t\}, \{q, \neg t, \neg y, \neg u, \neg p\}\}$$

Protokollieren Sie schriftlich oder graphisch entsprechend den Übungen den Verlauf des DPLL-Algorithmus angewandt auf F.

Halten Sie sich strikt an das Verfahren aus den Folien der Vorlesung, u.a. bedeutet dies, dass OLR und PLR bezüglich der lexikographischen Variablenordnung verwendet werden müssen, und dass im Fall einer Fallunterscheidung stets zuerst geprüft werden soll, ob eine Variable auf `true` gesetzt werden kann.

Lösungsvorschlag



Aufgabe 1.4

Eine Urne enthält $n = 24$ Bälle, die mit den Zahlen $[n] = \{1, 2, \ldots, 24\}$ beschriftet sind.

Es werden $k = 6$ Bälle gezogen ohne Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge.

(a) Sei A die Menge der Ziehungen mit höchstens einer geraden Zahl.

Es gilt z.B. $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}, \{1, 3, 5, 6, 7, 9\} \in A$ und $\{2, 3, 5, 7, 8, 9\} \notin A$.

Berechnen Sie $|A|$.

(b) Sei B die Menge der Ziehungen, in denen die längste Kette von konsekutiven Zahlen genau Länge $l = 4$ hat.

Es gilt z.B. $\{1, 2, 3, 4, 6, 7\}, \{18, 19, 20, 21, 23, 24\} \in B$ und $\{1, 2, 3, 4, 5, 7\}, \{18, 19, 20, 21, 22, 24\} \notin B$.

Berechnen Sie $|B|$.

(c) Sei C die Menge der Ziehungen, die die 1 und die 24 enthalten und in denen keine zwei konsekutiven Zahlen vorkommen.

Es gilt z.B. $\{1, 3, 5, 7, 9, 24\}, \{1, 3, 6, 9, 12, 24\} \in C$ und $\{2, 4, 6, 8, 10, 24\}, \{1, 9, 10, 11, 12, 24\} \notin C$.

Berechnen Sie $|C|$.

Hinweis: Jede solche Ziehung partitioniert die nicht gezogenen Zahlen in genau 5 nichtleere Mengen.

Alle Ergebnisse müssen in Dezimaldarstellung angegeben werden!

Lösungsvorschlag

(a) Es gibt $\binom{\frac{n}{2}}{k}$ Ziehungen ohne gerade Zahlen.

Es gibt $\frac{n}{2} \cdot \binom{\frac{n}{2}}{k-1}$ Ziehungen mit genau einer geraden Zahl.
Insgesamt:

$$\binom{\frac{n}{2}}{k} + \frac{n}{2} \cdot \binom{\frac{n}{2}}{k-1} = \binom{12}{6} + 12 \cdot \binom{12}{6-1} = 10428$$

(b) Entsprechend Straße beim Pokern, jedoch ohne Sonderregel für Ass.

Da $l > k/2$, gibt es immer höchstens eine Folge von konsekutiven Zahlen der Länge $\geq l$.

Wir betrachten drei Fälle:

- Die l-Sequenz startet bei 1.
  Dann darf man die restlichen $k-l$ Zahlen aus $n-l-1$ verbleibenden Zahlen wählen. Es gibt $\binom{n-l-1}{k-l}$ Ziehungen.
- Die l-Sequenz endet bei n.
  Symmetrisch zu dem vorigen Fall. Es gibt $\binom{n-l-1}{k-l}$ Ziehungen.
- Die l-Sequenz startet nicht bei 1 und endet nicht bei n (liegt "in der Mitte").
  Es gibt $(n-l-1)$ Möglichkeiten für die l-Sequenz selbst. Für jede Möglichkeit sind die beiden Zahlen vor dem Start und dem Ende der Sequenz verboten. Die restlichen $k-l$ Zahlen müssen also aus $n-k-2$ verbleibenden Zahlen gewählt werden. Es gibt damit $(n-l-1) \cdot \binom{n-l-2}{k-l}$ Ziehungen.

Insgesamt erhalten wir:

$$2 \cdot \binom{n-l-1}{k-l} + (n-l-1) \cdot \binom{n-l-2}{k-l} = 2 \cdot \binom{24-4-1}{6-4} + (24-4-1) \cdot \binom{24-4-2}{6-4} = 3249$$

(c) Jede Menge aus C partitioniert die Folge $1, 2, \ldots, n$ in $k-1$ Blöcke der Längen $l_1, \ldots, l_{k-1}$, wobei $l_1 + \ldots + l_{k-1} = n-k$ gelten muss.

D.h. man muss $m = n-k$ Euro auf $r = k-1$ Kinder so verteilen, dass jedes (unterscheidbare) Kind mindestens einen Euro erhält.

$$\binom{(n-k)-(k-1)+(k-1)-1}{(k-1)-1} = \binom{n-k-1}{k-2} = \binom{24-6-1}{6-2} = 2380$$

Aufgabe 1.5

Gegeben ist die Primzahl $p = 71$. Wir benützen im Folgenden $\cdot_n$ um die Multiplikation modulo einer natürlichen Zahl n zu beschreiben.

(a) Zeigen Sie, dass $g = 69$ ein Erzeuger von $\langle \mathbb{Z}_p^*, \cdot_p, 1\rangle$ ist.

(b) Tabellieren Sie den erweiterten euklidischen Algorithmus für $\mathsf{ggT}(19, 70)$ entsprechend der Vorlesung.

(c) Bestimmen Sie $((20)^{59})^{19} \bmod p$.

(d) Bestimmen Sie die Anzahl der Erzeuger von $\langle \mathbb{Z}_p^*, \cdot_p, 1\rangle$.

(e) Wir betrachten den gerichteten Graphen $G = \left(\mathbb{Z}_p^*, \{(x, x \cdot_p g) \mid x \in \mathbb{Z}_p^*\}\right)$. D.h. $\mathbb{Z}_p^*$ ist die Knotenmenge von G, wobei es eine Kante von x nach y genau dann gibt, wenn $y = x \cdot_p g$ gilt. Bestimmen Sie die Anzahl der Automorphismen des Graphen G.

Lösungsvorschlag

(a) Die Primfaktorzerlegung von $\varphi(p) = p-1 = 70$ ist $70 = 2^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1$. Laut Vorlesung ist g ein Generator gdw. $a^{\varphi(p)/q} \not\equiv 1$ für q prim mit $q|p-1$. In diesem Fall $q \in \{2, 5, 7\}$. Es muss also getestet werden, ob $(69)^{70/2} = (69)^{35} \not\equiv 1$, $(69)^{70/5} = (69)^{14} \not\equiv 1$ und $(69)^{70/2} = (69)^{10} \not\equiv 1$. Das kann mit Hilfe eines Taschenrechners bestimmt werden.

(b)

a	b	k	s	t
19	70	3	-11	3
13	19	1	3	-2
6	13	2	-2	1
1	6	–	1	0

(c) Für jede Gruppe G und jedes Element a aus dieser Gruppe gilt $a^{|G|} = 1$. Für $G = \mathbb{Z}_p^*$ mit p prim erhalten wir $|G| = |\mathbb{Z}_p^*| = \varphi(p) = p - 1$. Daraus folgt $a^k \equiv_p a^{k \bmod (p-1)}$ für alle $a \in \mathbb{Z}_p^*$. Es ergibt sich $(20^{59})^{19} \equiv_{71} 20^{(59\cdot 19) \bmod 70} \equiv_{71} 20^1 \equiv_{71} 20$.

(d) $\mathbb{Z}_p^*$ ist zyklisch und damit isomorph zu $\mathbb{Z}_{p-1}$ (additiv). Die Gruppe $\mathbb{Z}_{p-1}$ hat $\varphi(p-1) = \varphi(2^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1) = \varphi(2)\varphi(5)\varphi(7) = 1 \cdot 4 \cdot 6 = 24$ viele Erzeuger. Somit auch die Gruppe $\mathbb{Z}_p^*$.

(e) Da $\mathbb{Z}_p^*$ zyklisch ist, ist der Graph ein gerichteter Kreis der Länge $p - 1$; die Automorphismen sind daher gerade die $p - 1$ möglichen richtungserhaltenden Rotationen.

Ausführlicher: Ein Automorphismus α muss (g^k, g^{k+1}) wieder auf eine Kante (g^l, g^{l+1}) abbilden, d.h. es muss $\alpha(g^k) = g^{k+r}$ für ein festes $r \in \mathbb{Z}$ gelten. Da man im Exponenten modulo der Gruppenordnung $\varphi(p) = p-1$ rechnet, ist jedes α eindeutig durch $r \in \mathbb{Z}_{p-1}$ bestimmt.

Aufgabe 1.6

Wir definieren die Folge $(a_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ wie folgt:

$$a_0 = 3,\ a_1 = 2,\ \text{ und allgemein für } i \in \mathbb{N}_0\ \ a_{i+2} = 2\cdot a_{i+1} + 48\cdot a_i$$

Zeigen Sie mittels Induktion nach $i \in \mathbb{N}_0$, dass für alle $i \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$a_i = \frac{20\cdot 8^i + 22\cdot(-6)^i}{14}$$

Gliedern Sie den Induktionsbeweis entsprechend den Hausaufgaben.

Lösungsvorschlag Sei $f(n)$:

$$f(n) = \frac{20\cdot 8^n + 22\cdot(-6)^n}{14}$$

Wir zeigen mittels Induktion nach i, dass $a_i = f(i)$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$ gilt:

- Induktionsbasis: Es gilt:

  $$f(0) = \frac{20\cdot 8^0 + 22\cdot(-6)^0}{14} = \frac{20\cdot 1 + 22\cdot 1}{14} = \frac{42}{14} = a_0$$

  und

  $$f(1) = \frac{20\cdot 8^1 + 22\cdot(-6)^1}{14} = \frac{20\cdot 8 + 22\cdot(-6)}{14} = \frac{160 + (-132)}{14} = \frac{28}{14} = a_1$$

- Induktionsschritt: Sei $i \in \mathbb{N}_0$ beliebig fixiert.
  - Induktionsannahme: Für das fixiert i gilt sowohl $a_i = f(i)$ als auch $a_{i+1} = f(i+1)$, also

    $$a_i = \frac{20\cdot 8^i + 22\cdot(-6)^i}{14} \text{ und } a_{i+1} = \frac{20\cdot 8^{i+1} + 22\cdot(-6)^{i+1}}{14}$$

  - Induktionsbehauptung: Für das fixiert i gilt auch $a_{i+2} = f(i+2)$, also

    $$a_{i+2} = \frac{20\cdot 8^{i+2} + 22\cdot(-6)^{i+2}}{14}$$

  - Beweis der Induktionsbehauptung:

$$\begin{aligned}
a_{i+2} &= 2\cdot a_{i+1} + 48\cdot a_i && \text{mit der Induktionsbehauptung}\\
&= 2\cdot\frac{20\cdot 8^{i+1} + 22\cdot(-6)^{i+1}}{14} + 48\cdot\frac{20\cdot 8^i + 22\cdot(-6)^i}{14}\\
&= \frac{2\cdot 20\cdot 8^{i+1} + 2\cdot 22\cdot(-6)^{i+1} + 48\cdot 20\cdot 8^i + 48\cdot 22\cdot(-6)^i}{14}\\
&= \frac{2\cdot 8\cdot 20\cdot 8^i + 2\cdot(-6)\cdot 22\cdot(-6)^i + 48\cdot 20\cdot 8^i + 48\cdot 22\cdot(-6)^i}{14}\\
&= \frac{(2\cdot 8 + 48)\cdot 20\cdot 8^i + (2\cdot(-6) + 48)\cdot 22\cdot(-6)^i}{14} && \text{mit } \begin{cases} (2\cdot(-6)+48) = (-6)^2\\ (2\cdot 8 + 48) = 8^2\end{cases}\\
&= \frac{20\cdot 8^{i+2} + 22\cdot(-6)^{i+2}}{14}
\end{aligned}$$

  Damit folgt die Aussage nach dem Prinzip der vollständigen Induktion.

(a) Sei $a = 373065, b = 746130, c = 13$. Berechnen Sie ganze Zahlen α, β, γ mit $\mathsf{ggT}(a, b, c) = \alpha \cdot a + \beta \cdot b + \gamma \cdot c$.

(b) Sei $A = \{a, b, c, d\}$.

Geben Sie eine kleinste Relation $R_{\min}$ mit $R^*_{\min} = A \times A$ an. Formal: für alle R mit $R^* = A \times A$ gilt $|R_{\min}| \leq |R|$.

Geben Sie eine größte Relation $R_{\max}$ mit $R^*_{\max} \neq A \times A$. Formal: für alle R mit $R^* \neq A \times A$ gilt $|R_{\max}| \geq |R|$.

(c) Sei A eine Menge mit 5 Elementen.

Bestimmen Sie die Anzahl der Äquivalenzrelationen $R \subseteq A \times A$ mit genau drei Äquivalenzklassen.

Hinweis: Zerlegen Sie die Menge der Äquivalenzrelationen Anhand der Größe $K = 2, 3$ der größten Äquivalenzklasse.

(d) Zeigen Sie: Alle einfachen Graphen mit höchstens 8 Kanten sind planar.

(e) Seien A und B disjunkte Mengen mit jeweils n Elementen.

Sei F die Menge aller Funktionen $f : A \to (A \cup B)$.

Sei G die Menge aller Funktionen $g : (A \cup B) \to (A \times B)$.

Bestimmen Sie die Kardinalitäten $|F \times F|$ und $|G|$ speziell für $n = 3$.

Bestimmen Sie den Wert von n, für den gilt $\left(\frac{|G|}{|F \times F|}\right)^{\frac{1}{|A|}} = 141376$.

(f) Zeichnen Sie **bis auf Isomorphie** jeden Baum mit genau 5 Knoten **genau einmal**.

(g) Zeigen Sie explizit, dass weder $\langle \mathbb{Z}_{20}, \cdot_{20}, 0\rangle$ noch $\langle \mathbb{Z}_{20} \setminus \{0\}, \cdot_{20}, 1\rangle$ Gruppen sind.

Lösungsvorschlag

(a) Da a und c bzw b und c teilerfremd sind, kann der ggT lediglich 1 sein. Aus $\mathsf{ggT}(a, c) = 1$ folgt, dass es α, γ gibt mit $1 = \alpha \cdot a + \gamma \cdot c$. Wir können also $\beta = 0$ wählen. Ebenso gilt $\mathsf{ggT}(b, c) = 1$ und es gibt demnach die Möglichkeit β und γ zu finden, sodass $1 = \beta \cdot b + \gamma \cdot c$. Mit dem euklidischen Algorithmus erhalten wir zum Beispiel $1 = -3 \times a + 0 \times b + 86092 \times c$.

(b) Der transitive Abschluss einer Relation R enthält alle Elemente von $A \times A$ genau dann, wenn für jedes Paar $a, b \in A$ ein R-Weg von a zu b existiert. Dies ist der Fall genau dann, wenn es einen R-Kreis gibt, der alle Elemente von A besucht. Damit lässt sich also $R_{\min}$ finden indem man einen möglichst kleinen solchen R-Kreis beschreibt, z.B. $R_{\min} = \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, a)\}$.

Auf der anderen Seite ist es für $R_{\max}$ entscheidend, dass ein solcher R-Kreis nicht existieren darf. Dies ist zum Beispiel möglich indem man alle ausgehenden Kanten von einem Knoten (außer „seiner" Schlaufe) entfernt, also zum Beispiel $R_{\max} = (A \times A) \setminus \{(a, b), (a, c), (a, d)\}$ wählt. Jeder $R_{\max}$-Kreis enthält also entweder *nur* a oder *nicht* a. Demnach gilt, dass

- $(a, b) \notin R^*_{\max}$,
- $(a, c) \notin R^*_{\max}$,
- $(a, d) \notin R^*_{\max}$.

Ebenso könnte man alle eingehenden Kanten zu einem Knoten (bis auf „seine" Schlaufe) entfernen, zum Beispiel $R_{\max} = (A \times A) \setminus \{(b, a), (c, a), (d, a)\}$. Dann existiert keine Verbindung zum Knoten a außer von dem Knoten a selbst. Insbesondere gilt wieder für jeden $R_{\max}$-Kreis, dass entweder lediglich *nur* a oder eben *nicht* a enthalten ist.

(c) A hat $n = 5$ Elementen.

Lösung 1:
- Wenn die größte Äquivalenzklasse Größe $K = 2$ hat, dann muss es eine Klasse mit 1 Element und zwei Klassen mit jeweils 2 Elementen geben: $(\lambda_1, \ldots \lambda_5) = (1, 2, 0, 0, 0)$.
- Wenn die größte Äquivalenzklasse Größe $K = 3$ hat, dann muss es zwei Klassen mit jeweils 1 Element und eine Klasse mit 3 Elementen geben: $(\lambda_1, \ldots \lambda_5) = (2, 0, 1, 0, 0)$.

Mit Hilfe der Formel

$$\frac{n!}{\lambda_1! \cdots \lambda_n! (1!)^{\lambda_1} \cdots (n!)^{\lambda_n}}$$

für die Anzahl der Äquivalenzklasse von Typ $(\lambda_1, \ldots \lambda_5)$ ergibt sich

$$\frac{5!}{1! \cdot 2! \cdot (1!)^1 \cdot (2!)^2} + \frac{5!}{2! \cdot 1! \cdot (1!)^2 \cdot (3!)^1} = \frac{120}{8} + \frac{120}{12} = 15 + 10 = 25$$

Lösung 2: Genauso beschreibt die Stirling-Zahl zweiter Art die gegebene Situation: Es seien a_1, a_2, a_3 durch R paarweise unvergleichbare Objekte. Also gilt

- $(a_1, a_2) \notin R$, $(a_2, a_1) \notin R$,

- $(a_2, a_3) \notin R$, $(a_3, a_2) \notin R$,
- $(a_1, a_3) \notin R$, $(a_3, a_1) \notin R$.

Da es nur drei Äquivalenzklassen gibt, partitionieren $[a_1]_R = \{a \in A \mid (a_1, a) \in R\}$, $[a_2]_R = \{a \in A \mid (a_2, a) \in R\}$, $[a_3]_R = \{a \in A \mid (a_3, a) \in R\}$ die Menge A. Das heißt

$$A = [a_1]_R \cup [a_2]_R \cup [a_3]_R \text{ und } [a_i]_R \cap [a_j]_R = \emptyset \text{ für } 1 \leq i < j \leq 3.$$

Es stellt sich nun die Frage wie viele Möglichkeiten es gibt A in drei nicht-leere Mengen zu zerlegen, die dann jeweils eine Äquivalenzklasse beschreiben. Dies wird durch die Stirling-Zahl zweiter Art $S_{n,k}$ beschrieben oder hier konkret $S_{5,3}$.

(d) Aus dem Satz von Kuratowski folgt, dass alle nicht planaren Graphen mindestens so viele Kanten haben wie der K_5 oder der $K_{3,3}$. Dies liegt daran, dass Kontraktionen und Entfernungen von Kanten lediglich die Anzahl an Kanten reduzieren, jedoch nie erhöhen.

Der K_5 hat $\binom{5}{2} = 10$ Kanten und der $K_{3,3}$ hat $3 \cdot 3 = 9$ Kanten.

Somit sind alle Graphen mit höchstens 8 Kanten planar, da weder K_5 noch $K_{3,3}$ Minore sein können, da nicht genügend Kanten vorhanden sind.

(e) Wir haben:

- $|F| = (2n)^n$.
- $|F \times F| = (2n)^{2n} = 46656$.
- $|G| = (n^2)^{2n} = n^{4n} = 531441$.

Es gilt

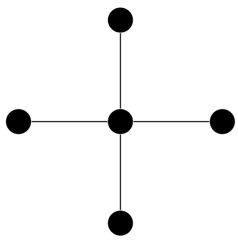
$$\left(\frac{|G|}{|F \times F|}\right)^{\frac{1}{|\mathbf{A}|}} = \left(\frac{n^{4n}}{(2n)^{2n}}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{n^4}{(2n)^2} = \frac{n^2}{4}$$

und daher wählen wir $n = 752$

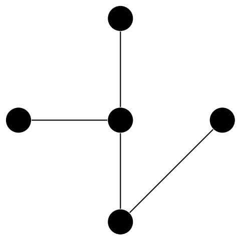
(f) Es gibt drei Bäume. Es ist nur notwendig, diese drei Bäume zu zeichnen. Hier beweisen wir darüber hinaus, dass es *genau* drei gibt.

Wir untersuchen die möglichen Gradsequenzen der Bäume mit 5 Knoten. Da diese Bäume mindestens 2 Blätter haben, muss die Gradsequenz die Gestalt $(1, 1, d_3, d_4, d_5)$ mit $1 \leq d_3 \leq d_4 \leq d_5$. Darüber hinaus gilt $1 + 1 + d_3 + d_4 + d_5 = 2|E| = 2(|V| - 1) = 8$ und somit $d_3 + d_4 + d_5 = 6$. Fallunterscheidung nach d_5:

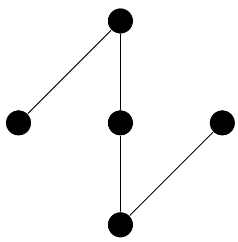
- $d_5 = 4$. Die einzige Gradsequenz ist $(1, 1, 1, 1, 4)$. Die Folge ist realisierbar und ergibt einen einzigen Baum: ein Stern mit vier „Spitzen“:



- $d_5 = 3$. Die einzige Gradsequenz ist $(1, 1, 1, 2, 3)$. Die Folge ist realisierbar und ergibt einen einzigen Baum. Der Knoten von Grad 3 hat einen Nachbarn mit Grad 2 und zwei Nachbarn mit Grad 1:



- $d_5 = 2$. Die einzige Folge ist $(1, 1, 2, 2, 2)$. Die Folge ist realisierbar und ergibt einen einzigen Baum: ein Pfad der Länge 4:



(g) 0 ist kein Neutrales für jedes $a \in \mathbb{Z}_{20} \setminus \{0\}$, da $0 \cdot_{20} a = 0 \neq a$.

Die Operation $\cdot_{20}$ ist auf $\mathbb{Z}_{20} \setminus \{0\}$ nicht abgeschlossen. Es gilt $5, 4 \in \mathbb{Z}_{20} \setminus \{0\}$, aber $5 \cdot_{20} 4 = 0 \notin \mathbb{Z}_{20} \setminus \{0\}$.

Für die anderen Varianten betrachten wir $\mathbb{Z}_n$ und statt den Zahlen 4 und 5 müssen zwei Zahlen p und q gewählt werden, sodass $p \cdot q = n$ mit $p \neq 1$, $q \neq 1$. Dies ist möglich, da n keine

Primzahl ist. Ebenso ist 0 niemals neutrales Element für $\mathbb{Z}_n$, da für ein $a \in \mathbb{Z}_n$ mit $a \neq 0$ eben $0 \cdot_n a = 0 \neq a$ gilt.